

Propuesta Didáctica de la enseñanza de Límites incorporando Aspectos de: Didáctica Francesa, Pensamiento Complejo, Competencias y TIC

Autores:
Jeffry Barrantes Gutiérrez
Andrea Mora Soto

Co-Autor:
Javier Trejos Zelaya

Resumen: En primera instancia se estudiaron propuestas metodológicas realizadas en: España, Cuba, Argentina, México, Estados Unidos, Grecia y Costa Rica para conocer la situación actual de la enseñanza de Límites Matemáticos de Variable Real a nivel Universitario. A raíz de la información recabada se realizó una propuesta de enseñanza de los Límites Matemáticos de Variable Real incorporando el Pensamiento Complejo, las Competencias, la Didáctica Francesa y las TIC en el curso de Cálculo I (MA-1210) de la Universidad de Costa Rica. La propuesta constaba de ejercicios guiados en laboratorio de cómputo utilizando manipulables y en clase tradicional mediante la proyección de las representaciones gráficas, además de evaluaciones por competencia.

Palabras Claves: Límites Matemáticos de Variable Real, Didáctica Francesa, Pensamiento Complejo, Competencias y TIC

Abstract: First, we studied methodological proposals made in: Spain, Cuba, Argentina, Mexico, United States, Greece and Costa Rica to the current situation of teaching Mathematical Real Variable Limits at University level. Following the information gathered was teaching a proposal Mathematical Variable Limits Real incorporating Complex Thought, Expertise, French Didactic and ICT Teaching in the course of Calculus I (MA-1210) from the University of Costa Rica. The proposal consisted of guided exercises in computer lab using manipulatives and traditional classroom by projecting the plots, as well as assessments by competition.

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento matemático es esencial en el óptimo desenvolvimiento en diversas áreas laborales y cotidianas, ya que promueve el desarrollo de habilidades y conocimientos necesarios para el desarrollo cognitivo adecuado del estudiante como ciudadano y profesional responsable.

Sin embargo, actualmente en los salones de clase como lo menciona Cordero (2008) se observa una gran desmotivación y desinterés por parte de los estudiantes en el sistema de educación de nuestro país, lo que afecta la correcta adquisición de los conocimientos estipulados en los programas de estudio.

Una causa de esta desmotivación que sufren los estudiantes, según Vílchez (2007), se da por la metodología tradicionalista que es utilizada por algunos profesores de diversas materias, y en particular en matemáticas. Donde se considera al estudiante como un receptor de conocimiento y el papel protagonista en el proceso de enseñanza y aprendizaje lo tiene el profesor.

El uso de la metodología tradicionalista es una de las causas de la deserción en los primeros cursos universitarios de matemáticas, puesto que la perspectiva de la mayoría de los profesores de matemáticas y los estudiantes es lograr obtener la “respuesta correcta”, sin importar la comprensión del proceso realizado.

Bajo este enfoque, se hace un mal uso de las herramientas tecnológicas como, la calculadora (García, 2008). Y no está mal la utilización de la tecnología, sino que, la misma debe ser una herramienta para la comprensión de los conocimientos y no tiene que ser el objeto central de la educación.

Esto es, que el desarrollo de la lección no debe consumirse en largas explicaciones para aprender a utilizar dicha herramienta, o bien, que la utilización de la tecnología dificulte la comprensión del conocimiento. La correcta utilización de la tecnología en la dinámica de la clase lograría obtener la atención del estudiante, además de contribuir en el aprendizaje significativo y completo por parte del estudiante, debido a que utilizan materiales que sean más cercanas a la cotidianidad de discente.

Bajo estas premisas se realiza una propuesta de enseñanza de los Límites Matemáticos con la utilización de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), además incorporando el pensamiento complejo, las competencias profesionales y la didáctica francesa.

Para ello se realiza una revisión de otras propuestas de enseñanza similares a nivel nacional e internacional.

A nivel nacional se encuentran dos propuestas similares en la utilización de las TIC, desarrollo de competencias y pensamiento complejo, solo que en diferentes temas, la primera de ellas es elaborada por Coto (2010), en el tema de la integral definida y la segunda es confeccionada por Arguedas (2010), cuyo tema es Máximos y Mínimos.

Ambas propuestas se llevaron a cabo en el curso Calculo I de la Universidad de Costa Rica, se utilizaron animaciones modeladas en el software matemático GeoGebra (utilizando la herramienta de los deslizadores para crear movimiento a las gráficas presentadas) y así realizar una mejor representación de temas como la recta tangente a una curva o la modelización de áreas sombreadas. Además, ambas propuestas hicieron uso de la plataforma Moodle como herramienta tecnológica.

La propuesta de Coto (2010), para su validación utilizó un grupo experimental y uno control, mientras que Arguedas (2010), utilizó dos grupos experimentales y uno control, se utilizaron en ambas propuestas evaluaciones idénticas a los grupos control y grupos experimental, para así poder medir el alcance de las propuestas.

Por otro lado, Mora y Rodríguez (2002), igualmente en Costa Rica, publicaron un artículo en la Revista Virtual Matemáticas Educación e Internet, sobre una propuesta realizada en la enseñanza de límites utilizando Software Matemático, en este caso *Mathematica 3.0* para realizar animaciones, además en dicha propuesta se elaboraron los llamados cuadernos virtuales y pantallas interactivas, para que el estudiante tuviera mayor manipulación e interacción de las animaciones. La única deficiencia encontrada es que no mencionan ningún tipo de actividad para evaluar la propuesta.

En lo que respecta a América Latina, se logra determinar que existen avances en el mejoramiento de metodología para la enseñanza a través de las nuevas tecnologías, no así haciendo uso del pensamiento complejo y las competencias en un tema específico como límites y continuidad, en los países que se evidenciaron avances son México, Argentina y Cuba.

En lo que a Argentina respecta, la autora Bertoia (s.f.), realizó una propuesta para la enseñanza del límite infinito en secundaria mediante una actividad-experimento realizada con espejos. Algunos aspectos positivos de la propuesta es que se logra alcanzar la concretización del

concepto límite. Una de las desventajas, es que solo se puede realizar con una función específica y por tanto no tiene mucho alcance.

Por otra parte, entre las metodologías distintas a la tradicional los autores Vrancken, Gregorini, Engler, Muller, Henzenn y Hecklein (s.f.) profesoras de la Facultad de Ciencias Agrarias, de la Universidad Nacional del Litoral, emplean el trabajo cooperativo como forma de trabajo para la enseñanza del Límite Infinito, no hacen uso de la tecnología, las actividades consisten en el cálculo de límites infinitos mediante tablas o gráficas realizadas en lápiz y papel. Como resultados destacan la importancia de mostrar los límites en sus distintas representaciones como también lo menciona la autora Clause (s.f.), ella utiliza el Software Matemático *Winplot* y tablas de valores para representar en sus diferentes formas el límite de una función.

Di Domenicantorio y Costa (2010) de la Universidad Nacional de la Plata, realizan una propuesta metodológica para el curso Cálculo Integral y Vectorial en una y varias variables, que consistió en talleres utilizando el software matemático *Maple* y la plataforma virtual *Moodle* como entorno virtual de enseñanza, generando así nuevos ambientes de aprendizaje.

Por otra parte, en México los autores Soberantes, Martínez y Cotera (s.f.), realizaron una propuesta para la enseñanza del cálculo, en ella utilizaron herramientas como *Internet*, *Applets* y el Software Gratuito *CalcVisual*, el curso era de cuatro horas semanales de las cuales dos se trabajaba en el laboratorio en parejas. La evaluación consistió en actividades por computadora, cabe mencionar que no se brindan mayores detalles de la evaluación y de las sesiones en el laboratorio.

En Cuba, en la Universidad Agraria de la Habana, debido a la falta de bibliografía en el tema de Cálculo Diferencial e Integral, hizo que los autores Yolanda Sabín, Vilma Toledo, Mercedes Albelo, Lázaro García y José Pino (2005), se dieran a la tarea de confeccionar un libro electrónico, que contenía el desarrollo de ejemplos y apoyo gráfico.

Otros estudios realizados fuera de América Latina, señalan la importancia de incorporar las tecnologías en la enseñanza del cálculo. Algunos de los países que evidencian esfuerzos de este cambio son: Estados Unidos, España y Grecia.

En Estados Unidos, la autora De Ting Wu (2006), utilizó tecnologías mediante Software como *Mathcard* y *Maple* manipulables para el estudiante y así facilitar la representación de los límites

y llegar a respuestas correctas, sin embargo no mencionan los resultados finales de la propuesta.

En España se dieron avances en cuanto a la visualización y manipulación de los límites, con la propuesta de Martín y Martín (2007), dichos autores la titulan como una propuesta “híbrida”, ya que la primera parte consiste en el cálculo de límites tradicionalmente (lápiz y papel) y la segunda parte el uso de computadoras y animaciones manipulables para que el estudiante lograra una mayor comprensión visual del límite, cabe destacar que para el uso de la computadora se elaboró una guía de preguntas generadoras que facilitaba el avance de los estudiantes, en cuanto a la evaluación no se evidencian muestras de las mismas y por ende de los resultados y avance alcanzado.

Para finalizar, en la universidad de Atenas, Grecia surge el proyecto CalGeo, el cual consiste en enseñar el cálculo utilizando herramientas de geometría dinámica. Para abarcar el tema de límites los profesores y autores Biza, Diakoumopoulos y Souyoul (2007) mencionan que trabajaron con la idea intuitiva de límites, así como la definición mediante representaciones gráficas y numéricas, la principal conclusión que mencionan los autores es la notoria discrepancia que existe entre la definición formal y el concepto informal de dicho tema.

Cabe destacar que no todas las propuestas mencionadas anteriormente realizan alguna evaluación que arroje resultados sobre su puesta en práctica y esta es una de las diferencias del trabajo que se desea realizar con respecto a otros llevados a cabo. Por lo tanto, en esta propuesta se busca llenar estos vacíos que otros trabajos han dejado en lo que a resultados se refiere y análisis se refiere.

2. REFERENTE TEÓRICO

Dado que la propuesta involucra aspectos de líneas de pensamiento como: la Didáctica Francesa y las teorías que de ella se derivan, Pensamiento Complejo, Competencias y Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), se hace necesario presentar la posición teórica que al respecto se adopta.

La Didáctica Francesa, considera la didáctica de las matemáticas como una ciencia autónoma, que estudia el saber desde el enfoque epistemológico, el alumno desde de perspectiva de la cognición y el profesor a través de la pedagogía, eliminando así la relación biunívoca entre el alumno y el profesor (Gómez, 2005).

El enfoque epistemológico (el saber) se caracteriza por el proceso llamado Transposición Didáctica, el cual se define como el procesos de transformación que sufre el objeto que se va a enseñar (Gómez, 2005). Además, Chevallard citado por Gómez (2005), introduce tres nuevos términos como lo son: “*el saber sabio*” definiéndolo como el conocimiento erudito tal y como es producido en el campo científico, “*el saber a enseñar*” que se da mediante modificaciones o adaptaciones que se le deben hacer al saber sabio para poder ser enseñado y finalmente el “*saber enseñado*” es la manera de cómo se va a enseñar el conocimiento.

Por otro lado, desde la perspectiva de la cognición (el alumno) se trabaja con la Teoría de Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990). Vergnaud menciona que el conocimiento está organizado en campos conceptuales y que este proceso se da en un extenso periodo de tiempo. Es decir, la Teoría de Campos Conceptuales se trata de una Teoría Psicológica del proceso de conceptualización de lo real que permite localizar y estudiar continuidades y rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual (Moreira, 2002).

Desde la visión de la pedagogía (el profesor) se trabaja con la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986). Es decir, al estudiante se le debe presentar situaciones en cuya solución sea necesaria la adquisición de nuevos conocimientos. Bajo el enfoque de Brousseau, la labor del profesor es elegir las situaciones a-Didácticas que ayuden al discente a interactuar para lograr una solución, dicho de otra manera, debe simularse el trabajo que realizó un matemático en la producción del conocimiento (tomando en cuenta la Transposición Didáctica) (Brousseau, 1986). En este enfoque el profesor no tiene un papel protagonista, ya que es el mismo estudiante quien construye el conocimiento, sin embargo al finalizar el proceso el docente debe institucionalizar el conocimiento.

Por otro lado, como segundo eje se encuentran las Competencias Profesionales, las cuales se definen según Tobón (2008) como:

Procesos complejos de desempeño con idoneidad en determinados contextos, integrando diferentes saberes (saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir), para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación, flexibilidad, creatividad, comprensión y emprendimiento, dentro de una perspectiva de proceso metacognitivo, mejoramiento continuo y compromiso ético, con la meta de contribuir al desarrollo personal, la construcción y afianzamiento del tejido social, la búsqueda continua del desarrollo económico

empresarial sostenible, y el cuidado y protección del ambiente y de las especies vivas. (Tobón, 2008, pág. 5).

Las Competencias, como lo menciona Tobón, son todos los procesos necesarios para la formación del ser humano de manera completa, para lograr así su realización personal, tomando en cuenta su ámbito personal, educativo, ambiental y social. Debido a esto son un aspecto fundamental en la propuesta, ya que la misma se basa en el desarrollo de competencias necesarias para que el individuo pueda desenvolverse de la mejor manera en el ámbito académico y profesional.

Con respecto a la educación superior, Tobón realiza una clasificación de las Competencias en Competencias Genéricas y Específicas, las Genéricas corresponden a las Competencias que se pueden desarrollar en todas las asignaturas, mientras que las Competencias Específicas, son las que se presentan en una materia o campo en particular, las cuales se desean desarrollar dependiendo del desenvolvimiento que se quiere a futuro de la persona.

Es importante mencionar que si se quieren poner en práctica, un diseño curricular por competencias, la evaluación no puede seguir siendo la misma y aquí es donde aparece una modificación importante, ya que Hawes (2005) propone que la evaluación debe ser basada en observaciones, trabajos periódicos y continuos, proyectos interrelacionados con otras asignaturas, además la autoevaluación dentro del proceso, ya que se debe tomar en cuenta el avance o crecimiento diarios, de la mano del facilitador que guiará la etapa de aprendizaje.

Por otra parte, los autores Tobón y Margery (2010) se refieren y proponen los niveles de logro de las Competencias. Tobón los divide en Nivel I, Nivel D, Nivel C, Nivel B y Nivel A, que respectivamente corresponden a Incompetencia, Deficiencia, Competente, comportamientos típicos de un individuo superior al promedio y el más alto nivel de desarrollo de la Competencia.

Ahora, el Pensamiento Complejo, como tercer eje de acción, consiste en la perspectiva global del mundo desde todos los puntos de vista, cada componente que lo conforma, tomando en consideración que al final este proceso es un todo caracterizado por la volatilidad, incertidumbre, complicación y ambigüedad. Es por esto, que cualquier situación cotidiana, incluido el proceso educativo, es considerado complejo.

Según la perspectiva de Morin (2002), el Pensamiento Complejo consiste

En una nueva racionalidad en el abordaje del mundo y del ser humano, donde se entretajan las partes y los elementos para comprender los procesos en su interrelación, recursividad, organización, diferencia, oposición y complementación, dentro de factores de orden y de incertidumbre (Morin, 2002, p.79)

Debido a esto, el Pensamiento Complejo propone reestructurar la educación utilizando procesos que fomenten la interdisciplinariedad, multidisciplinariedad entre otros, buscando fomentar en los estudiantes actividades que se acerquen a la realidad, a las necesidades de la sociedad en general, por esta razón es que la propuesta pretende estimular y desarrollar el Pensamiento Complejo, como parte fundamental del aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente el cuarto eje de acción es la incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC). Puesto que el estilo de vida del ser humano se encuentra en constante cambio, obliga a las personas a adaptarse a la nueva era de la Alfabetización Digital.

La educación no puede quedarse atrás, ya que el proceso de aprendizaje debe estar más cercano a la realidad del estudiante. Una ventaja de la correcta incorporación de las tecnologías en los salones de clase, es que fomenta un mayor protagonismo de los estudiantes, mejor accesos a los contenidos y a sus distintas representaciones, un mayor aprovechamiento del tiempo, gran motivación y atracción por los contenidos, entre otras ventajas (Arguedas, 2010)

3. Propuesta didáctica para la Enseñanza de Límites

El cálculo es una de las ramas de la matemática que forma parte en los currículos de diversas carreras en la Universidad de Costa Rica, por ejemplo en áreas como: salud, ciencias exactas y naturales, educación, informática, ingeniería, entre otras.

Dentro de esta rama de la matemática, se encuentra el tema de Límites cuyo contenido es indispensable para el desarrollo de los temas posteriores del cálculo además de que modela diversas situaciones de la vida cotidiana, es por ello que se decide elaborar y aplicar una propuesta didáctica para la Enseñanza de Límites de Funciones en una Variable Real.

Dicha propuesta es aplicada a un grupo del curso MA-1210 Cálculo I, en el Recinto de Paraíso de la Universidad de Costa Rica, durante el II Semestre del 2011. El curso está programado

para un total de cinco horas semanales distribuidas en dos sesiones de dos y tres horas. El grupo está conformado por 21 estudiantes en lista de matrícula provenientes de la carrera de Turismo Ecológico.

Este tópicos es el primero en el programa del curso, en donde se verá la idea intuitiva del límite, cálculo de límites con tabla de valores y aplicando métodos de factorización y racionalización. La escogencia de estos contenidos es el proceso llamado Didáctica Transposición (en donde se realiza la escogencia de los saberes a partir de la noósfera).

En la implementación de esta propuesta se trabaja con TIC, principalmente el uso de la computadora y el Internet, ya que se cuenta con un laboratorio en donde cada estudiante tiene asignada con una computadora para poder trabajar individualmente. Además se utiliza el Software Matemático GeoGebra^{®1}, en donde se les brinda a los estudiantes archivos previamente creados para su manipulación gráfica.

La utilización del Internet también fue importante, ya que se creó un grupo en la red social Facebook^{®2}, con el objetivo de que los estudiantes realizaran consultas desde este sitio tan frecuentado por los jóvenes. Además, en esta red social se recomendaban páginas Web, se realizaron recordatorios del curso, entre otras cosas.

Por otro lado, se trabajó con la página Web WolframAlpha^{®3}, la cual se les recomendaba como un apoyo para la corroboración de procesos, respuesta y además visualización de los gráficos de funciones, ya que ellos no cuentan con el programa GeoGebra[®] en sus ordenadores.

Además, una Competencia que se pretende desarrollar es: *“La capacidad de reconocer la existencia del límite de una función real, así como aplicar métodos de sustitución, factorización y racionalización de polinomios para el cálculo de límites algebraicos, laterales, infinitos (asíntota horizontal) y al infinito (asíntota vertical)”*.

¹ GeoGebra es un software de matemática libre, que reúne geometría, álgebra y cálculo desarrollado por Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo (www.geogebra.org).

² Es un sitio Web que funciona como una plataforma de comunicación, que permite contactar gente que se conoce o personas que se desean conocer desde cualquier parte del mundo. En él se pueden compartir videos, comentarios, etc. Fue creado por Mark Zuckerberg estudiante de Harvard en el 2004 (www.facebook.com).

³ Es un buscador de respuestas creado por la compañía Wolfram Research en el 2009. Es un servicio en línea que responde a preguntas matemática directamente, mediante el procesamiento de la respuesta extraída de una base de datos (www.wolframalpha.com).

Como primera instancia, se debe tomar en cuenta los indicadores y conocimientos previos de los estudiantes que entre los más importantes están: manejo de gráficas, identificar el dominio máximo de una función, conocer y aplicar los métodos de factorización y racionalización para la simplificación de expresiones.

Por otra parte, para la evaluación de las competencias, se tomarán en cuenta los siguientes criterios de desempeño:

1. Identifica la existencia y el valor del límite de una función mediante las gráficas y tablas de valores.
2. Calcula límites de funciones reales por métodos algebraicos.
3. Calcula límites infinitos de funciones reales por métodos algebraicos y determina las asíntotas verticales.
4. Calcula límites al infinito de funciones reales por métodos algebraicos y determina las asíntotas horizontales.

Para determinar si logra alcanzar satisfactoriamente los criterios se establecen tres niveles de logro: Básico, Intermedio y Estratégico. El nivel Básico, dentro de las características deseables se destacan actitud positiva, conocimiento de las nociones básicas de los conceptos y realización de los procedimientos básicos; el nivel Intermedio se caracterizará por la necesidad de buscar apoyo o guía para resolver problemas exitosamente; y el nivel Estratégico se alcanza cuando el estudiante logra justificar todos los razonamientos necesarios para resolver la situación.

Cabe mencionar que como parte de la inclusión de las actividades diarias del estudiante y la incorporación de las TIC en la propuesta de enseñanza, fomentando el desarrollo del ser humano como un ser complejo. Se integró las redes sociales, creando un grupo de Facebook donde el estudiante pudiera interactuar con el docente fuera de las lecciones, creando un espacio propicio de estudio. Además, se presentan situaciones problemas como introducción al tema de límites, esto como parte de algunas actividades cotidianas dentro del estudio integrado para la vida diaria.

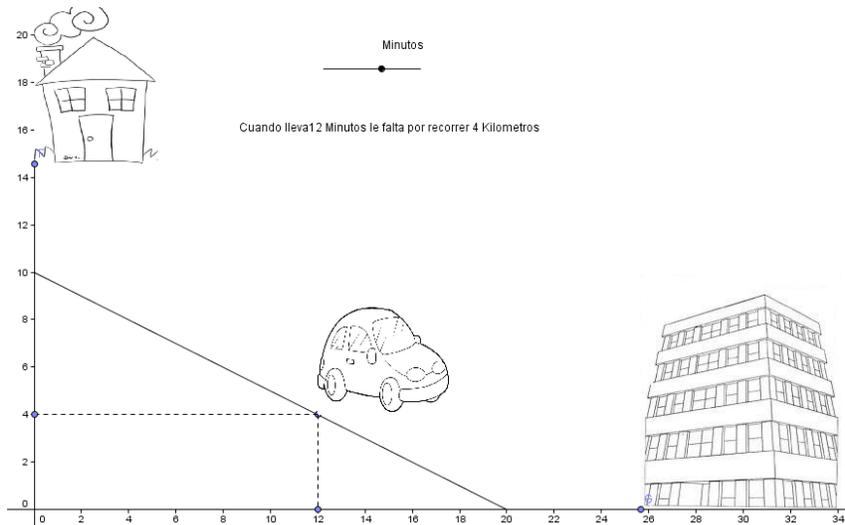
Con respecto a la propuesta, la cantidad de lecciones que se emplearon para implementar la propuesta fueron tres, las mismas se desarrollaron de la siguiente manera. En la primera lección se trabajó la idea intuitiva de límite, la representación gráfica de límites, cálculo de límites inmediatos, límites laterales y propiedades de los límites.

En la segunda lección se realizó un pequeño repaso del cálculo de límites mediante sustitución directa (lección #1) y además se realizó un breve repaso de métodos de factorización, racionalización y simplificación de expresiones algebraicas. Seguidamente se trabajaron los límites algebraicos. Finalmente en la tercera lección se trabajaron los límites infinitos y al infinito

Para cada lección, se le entregó a los asistentes hojas de trabajo con aproximadamente entre cuatro y ocho ítems y se trata de ejercicios con preguntas generadoras. El objetivo es que asimile la información y contenidos de una manera adecuada.

Se le facilitó, a cada estudiante, en su debido ordenador un archivo manipulable en GeoGebra®. Como actividad introductoria se le presentó la siguiente situación:

Una persona va a asistir a una entrevista de trabajo en BASOMASA S.A. Se le programó la cita para las 2:20 pm. Su casa de habitación se encuentra a una distancia de 10 km. Sale en carro de su casa a las 2:00 pm. Durante el viaje va consultando su reloj constantemente y observa que a las 2:06 pm se encuentra a 7 km de la empresa, a las 2:14 pm se encuentra a 3 km, a las 2:16 pm se encuentra a 2 km y finalmente cuando marca su reloj las 2:18 pm se encuentra a una distancia de 1 km. La persona llegó puntual a su entrevista. Observemos el gráfico de su recorrido:



Se les entregó la figura anterior en el programa GeoGebra®. Esta figura posee animación, al mover el punto con el deslizador (parte superior) el automóvil se desplaza a lo largo de la línea (función lineal). En el eje de la ordenadas se encuentran los kilómetros que debe recorrer el

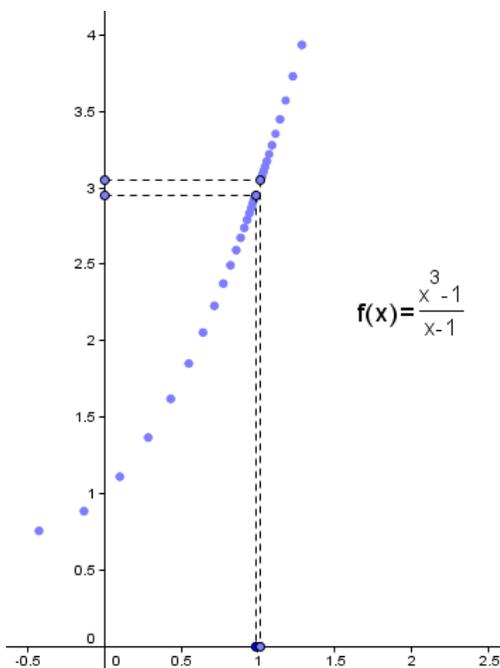
individuo y en el eje de las abscisas los minutos después de las 2 pm. Las líneas discontinuas van marcando los minutos que llevan transcurridos y los kilómetros recorridos. Además, en la pantalla hay una leyenda que dice: “Cuando lleva ... minutos transcurridos le falta por recorrer ... kilómetros”.

Una vez que el estudiante manipuló el archivo, se le realizarán las siguientes preguntas con la finalidad que conteste dando los valores numéricos:

- ✓ Cuando lleva transcurridos 10 minutos, ¿cuánta distancia le falta para llegar a la entrevista de trabajo?
- ✓ Cuando han transcurrido 14 minutos, ¿cuántos kilómetros le faltan por recorrer?
- ✓ Y cuándo lleva 16 minutos de viaje, ¿cuánta distancia le falta?
- ✓ A los 18 minutos ¿a qué distancia se encuentra de la empresa?

Finalmente, se le puede preguntar al estudiante sobre cuál es la conclusión que puede obtener respecto al tiempo y la distancia, se escuchan las ideas de los estudiantes y el cierre lo hace el profesor, con la frase “la distancia de la empresa se aproxima a cero cuando los minutos transcurridos se aproximan a los 20”, con el objetivo de introducir el lenguaje que se utilizará en el tema de límites.

Este primer ejemplo introductorio, se trata de un ejemplo de una situación cotidiana de todos los estudiantes. Sin embargo al plantearse las preguntas anteriores el estudiante necesita la adquisición de nuevos conocimientos (en este caso la idea intuitiva de límite) para la solución a los cuestionamientos. Es una situación a-Didáctica que fue planteada por el docente para la adquisición del conocimiento deseado.



Otro ejemplo que se les presentó a los estudiantes, es determinar el valor de $f(x)$ para $x = 1$ y para valores muy cercanos a $x = 1$, de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Se le hace notar al estudiante que $f(1)$ no existe, ya que el denominador se hace cero. Sin embargo, si se gráfica la función para valores muy cercanos a uno la función $f(x)$ se acerca a un valor numérico específico,

como se puede observar en la figura, los puntos celestes (valores de la función $f(x)$) cada vez que el valor de x se acerca más a 1 estos se aglutinan al valor de 3.

Una vez realizado el análisis con la gráfica de la función y determinar al valor del límite mediante el manipulable, se realiza en la pizarra la factorización y simplificación de la función para realizar una comparación de las respuestas obtenidas.

Se le hace comprender al estudiante que aunque en la función original cuando $x = 1$ no existe, para valores muy cercanos a uno el valor de $f(x)$ se acerca o “tiende a ser 3” matemáticamente eso se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

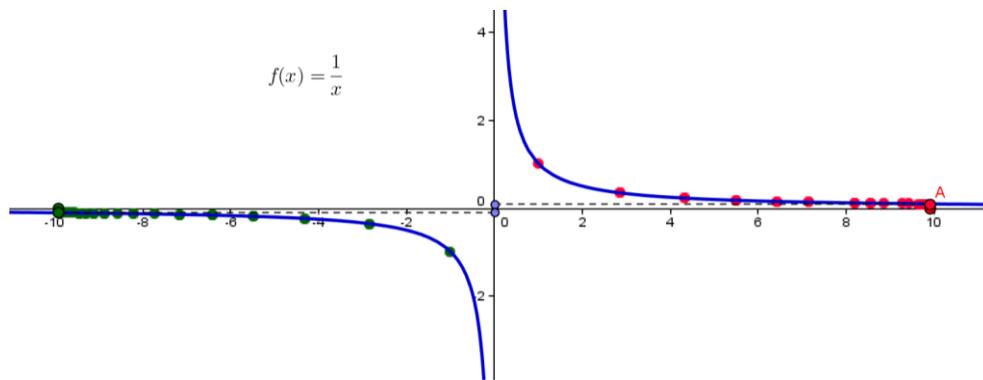
Todos los archivos presentados a los estudiantes eran manipulables, en los cuales ellos podrían estar cambiando los valores de x para observar a que valor se acerca la función $f(x)$.

Cabe mencionar que en la segunda lección no se contó con el laboratorio de cómputo, por lo que las gráficas de las funciones creadas en los archivos de GeoGebra® fueron proyectadas a los discentes. Además, se estaba en constante revisión de la página WolframAlpha® para corroborar las respuesta y así crear en el estudiante poco a poco un sentimiento de credibilidad en lo que él resuelve.

En la tercera lección, uno de los ejemplos más representativos fue el de determinar el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \quad y \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

Ya que para el estudiante, en muchos casos, es complicado entender por qué cuando el valor de x tiende a infinito de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, el valor al que se acerca $f(x)$ es cero. Al presentarle el siguiente manipulable los estudiantes comprendieron gráficamente el motivo del resultado.



Ya que se puede observar que cuando el valor de x se hace más grande, es decir, “*tiende a ser $+\infty$* ” el valor de $f(x)$, los puntos de color rojo sobre la gráfica, se acercan más al valor cero. Análogamente, cuando el valor de x se hace más pequeño, es decir, “*tiende a ser $-\infty$* ” el valor de $f(x)$, los puntos de color verde sobre la gráfica, se acercan más al valor cero.

Este mismo ejemplo sirvió para explicar, gráficamente, por qué cuando el valor de x se acerca a cero el valor del límite es infinito, ya que la función crece (o decrece) sin límite, es decir, conforme los valores de x se acercan a 0 por la derecha (valores positivos) el valor de $f(x)$ cada vez es más grande (existe una mayor espacio entre los puntos de la gráfica), “*tiende a $+\infty$* ” y conforme los valores de x se acercan a 0 por la izquierda (valores negativos) el valor de $f(x)$ cada vez es más pequeño (existe una mayor espacio entre los puntos de la gráfica), “*tiende a $-\infty$* ”.

Finalmente, para dejar más claro el concepto de división entre cero se les presentó el siguiente problema:

Se pide imaginar que se tiene un cubo de agua de un litro cúbico y que se desea llenar un tanque de diez litros cúbicos, para llenar el tanque se necesitarían diez cubos llenos de agua. Ahora supóngase que el cubo es diez veces más pequeño, se necesitarían cien cubos llenos. Si el cubo es cien veces más pequeño se necesitaría mil cubos; si es mil veces más pequeño, diez mil cubos, y así de forma sucesiva. Se deduce que podríamos pensar que si el cubo lleva cero litros se tendrían que hacer infinitos viajes para llenar el tanque.

Por su parte, la evaluación que se realizó, para lograr determinar el nivel alcanzado de la competencia por los estudiantes, fue de dos maneras distintas según los criterios de desempeño establecidos. La primera mediante hojas de trabajo entregadas a los estudiantes,

estas contenían ejercicios, en donde se debía contestar preguntas generadoras, que los llevará a analizar, comprender y resolver el límite. Esto con el objetivo de poder guiar al estudiante e involucrarlo de manera más activa en el proceso de aprendizaje.

Por otra parte, la segunda forma de evaluación se realizó mediante la observación del desarrollo de la clase, esta se pretendía evaluar la actitud presentada por cada uno de los alumnos en el desarrollo de la lección, según las anotaciones propias del docente en su bitácora de lección. Además de observar el avance de cada estudiante y la asimilación de la información brindada.

Entre las limitaciones presentadas antes y durante la aplicación de la propuesta didáctica se encuentran: las fallas técnicas producidas en el laboratorio de cómputo, ya que al estar conectadas veinticinco computadoras el Internet bajo considerablemente su velocidad, conjuntamente a la hora de ejecutar los archivos de GeoGebra[®], las computadoras no tuvieron el rendimiento adecuado.

Lo anterior conllevó a un atraso en el desarrollo del curso y un recorte de los ejemplo planeados para dicha clase. Otra situación particular que se presentó, es que entre las fechas de la aplicación de la propuesta existía un día feriado, el 15 de agosto día de la madre, lo que llevó a reducir la cantidad de lecciones, que en un principio eran cuatro.

4. Análisis del logro alcanzado con la propuesta

Para observar de alguna forma el logro alcanzado por los estudiantes, se analizó uno a uno cada criterio de desempeño, obteniendo los siguientes resultados:

- ✓ Con respecto al primer criterio se evidencia que el 55% de los estudiantes alcanza su nivel máximo, mientras que solo el 12% no logra superar el nivel básico.
- ✓ Del segundo criterio se obtiene que el 77% de los estudiantes alcanzan el segundo nivel, el 12% alcanza el nivel máximo y de igual forma el 12% no logra superar el nivel básico.
- ✓ Del tercer criterio se determina que el 44% alcanzan el segundo nivel, el 33% alcanzan el máximo nivel y el 22% no alcanza superar el nivel básico.
- ✓ Del cuarto criterio no se determina el logro alcanzado, ya que por factor tiempo no se pudo evidenciar.

De lo anterior, realizando un análisis calculando la desviación estándar de cada criterio, se observa que dicha desviación es baja en todos los criterios, lo que indica que hay bastante homogeneidad en los valores.

En lo que respecta al nivel alcanzado de la competencia, se determina que el 89% de los estudiantes alcanza el nivel intermedio, mientras que solamente el 11% llegó a alcanzar el primer nivel. En términos generales, en lo que a estudiantes se refiere, estos en promedio alcanzaron el nivel dos de la competencia.

Para finalizar, con respecto a la respuesta que se obtuvo por parte de los estudiantes con la incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) a las lecciones, se tomó como base la primera lección que fue en la que se contó con el laboratorio de cómputo, obteniendo que de los estudiantes el 76% se muestra satisfecho y motivado por el uso de la tecnología, mientras que el 24% argumenta que no les agradó las actividades desarrolladas por medio de la computadora.

Algunas de las razones que exponen los estudiantes sobre el no gusto por las actividades de la primera lección, se debe a que poseen poca habilidad en la computadora, no les gusta trabajar en las mismas, ya que consideran que la clase se vuelve aburrida, complicada y tediosa, además de que el rendimiento de las computadoras no fue el esperado.

Se determina al final que la propuesta si tiene un alcance importante, se deben mejorar en muchos aspectos, pero esto es un primer acercamiento para demostrar que en las clases universitarias se puede implementar las nuevas tecnologías, en lo que a matemática se refiere, haciendo de las mismas unas clases provechosas, motivadoras y aprovechables para los estudiantes, una nueva manera de enseñar.

5. Conclusiones

Con respecto a este tipo de enseñanza, empleando las TIC, el Pensamiento Complejo y las Competencias, es una alternativa viable en los salones de clase, son alternativas que según los estudios bibliográficos realizados, a la actualidad son muy escasos y en su mayoría carecen de una evaluación acorde a la forma de enseñar, lo que no le da validez ya que no se muestran los resultados obtenidos.

En lo que al tema de límites de funciones se refiere, se logró una mejoría en la idea intuitiva que presentan los estudiantes con respecto al límite, mejoraron sus formas de observar un límite, ya

que se podía mostrar gráficamente lo que los estudiantes realiza normalmente algebraicamente calculando el valor numérico.

El trabajar con la computadora hizo que la mayoría de los estudiantes se motivaran presentando un menor rechazo a la materia. Sin embargo, no a todas las personas les agrado, ya que los estudiantes que se les dificulta el uso de la computadora hicieron ver su desacuerdo con las actividades.

Los resultados muestran que el 89% de los estudiantes alcanzaron el nivel intermedio de la competencia y el 11% alcanzó el nivel máximo, esto demuestra la viabilidad y validez de esta propuesta.

Esta forma de enseñanza, como se mencionó anteriormente es una alternativa viable, sin embargo no se debe dejar de lado que la misma requiere de un poco más de tiempo, por parte de los docente, para la investigación y elaboración de actividades y evaluaciones acordes con el uso de las TIC, Competencias y Pensamiento Complejo.

El realizar este tipo de propuestas es una buena alternativa para la educación secundaria y universitaria, teniendo presente siempre que al cambiar la forma de enseñar, mediante competencias, TIC y Pensamiento Complejo, se debe incluir también un cambio en la evaluación del curso en que se imparta y del alcance logrado, ya que no se puede evaluar de una forma tradicionalista una propuesta que busca que el estudiante sea el partícipe de su propio aprendizaje, se debe valorar el progreso diario.

Con esta propuesta se deja abierta la posibilidad de realizar mayores estudios que muestren resultados sobre esta esta forma diferente de enseñar, en el caso de límites sería bueno ampliarlo al tema de continuidad y así ir abriendo la brecha al cambio de la forma tradicionalista de enseñar.

6. BIBLIOGRAFÍA

Arguedas, J. (2010) *Propuesta para la enseñanza de los máximos y mínimos*. Tesis de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Educativa, Universidad de Costa Rica, San José.

Bertoia, M. (s.f.) “La interpretación del límite infinito mediante una experiencia con espejos”, en: [//www.soarem.org.ar/Documentos/30\%20Bertoia.pdf](http://www.soarem.org.ar/Documentos/30\%20Bertoia.pdf), consultado el 03/05/2011, 14:30.

- Biza, I.; Diakoumopoulos, D.; Souyoul, A. (2007) "Teaching analysis in dynamic geometry environments" en: http://ermeweb.free.fr/CERME\%205\WG9\9_Biza.pdf, consultado el 13/02/2012, 13:00.
- Brousseau, G. (1986) "Fundaments and methods of didactique", in: G. Brousseau, N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield (Eds.) *Theory Of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers: 21-76.
- Clausese, M. (s.f.) "Dos experiencias de clase con recursos informáticos. Tems: límites y aplicaciones de la función lineal", en: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/3320Clausese.pdf>, consultado el 25/08/2011, 18:30.
- Cordero, T. (2008) "La opinión de un grupo de docentes sobre la deserción, explorando sobre sus actuaciones en el contexto institucional", *Revista Actualidades Investigativas en Educación, UCR* **8**(3), en: <http://revista.inie.ucr.ac.cr/articulos/3-2008/archivos/opinion.pdf>, consultado el 19/02/2011, 14:20.
- Coto, M. (2010) *Propuesta para la enseñanza de la integral definida*. Tesis de Maestría Académica en Matemática con énfasis en Matemática Educativa, Universidad de Costa Rica, San José.
- Di Domenicantorio, R.; Costa, V.; (2010) "Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del cálculo integral y vectorial", *Revista UNI* en: <http://www.fisem.org/web/union/revistas/21/Union021018.pdf>, consultado el 30/05/2011, 11:30.
- García, J. (2008) "El aprendizaje de las matemáticas y la obtención de la respuesta correcta", *Intersedes, Revista de las Sedes Regionales* **9**(16): 115-133, en: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/666/66615063009.pdf>, consultado el 20/02/2011, 13:03.
- Gómez, M. (2005) "La transposición didáctica: Historia de un concepto". *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos* **1**(2):83-115.
- Hawes, G. (2005). "Evaluación de competencias en Educación Superior" en: <http://www.freewebs.com/gustavohawes/Educación20Superior/2004Evaluacioncompetencias.pdf>, consultado el 29/09/2012, 15:30.

- Margery, E. (2010). Complejidad, Transdisciplinariedad y Competencias: Cinco Viñetas Pedagógicas. URUK Editores. San José, Costa Rica
- Martín, A.; Martín, M. (2007) "Límites de funciones, indeterminaciones, continuidad, relación con la aplicación en la interpretación de situaciones y su representación", en: http://www.aulamatematica.com/Congresos/JAEM_13_Granda/pdf/13_JAEM_limites.pdf, consultado el 13/02/2012, 15:45.
- Mora, W.; Rodríguez, J. (2002) "Conceptos de cálculo diferencial presentados por medio del computador usando Mathematica", Revista Digital Matemática Educación e Internet **3**(3), en: <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV3n3002/0calculoJulioWaler/pag1.html>, consultado el 18/08/2011, 22:15.
- Moreira, M. (2002) "La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. La enseñanza de las ciencias y la investigación en el área", *Investigaciones en la Enseñanza de las Ciencias*, **7**(1): 7-29, en: <http://www.if.ufrgs.br/vergnaudespanhol.pdf>, consultado el 25/05/2011, 23:33.
- Morin, E. (2002). La cabeza bien puesta. Repensar la reforma. Reformar el pensamiento. Argentina: Nueva Visión.
- Sabín, Y.; Toledo, V.; Albelo, M.; Gracia, L.; Pino, J. (2005) "Una herramienta de apoyo a la enseñanza del cálculo diferencial e integral a través de las tecnologías de la Información y las comunicaciones (TIC)", **14**(003): 59-62.
- Salazar, L. (2003) "TIC's Software libre y educación matemática", en: <http://www.colombiadigital.net/newcd/index.php?option.pdf>, consultado el 24/03/2011, 19:45.
- Soberantes, A.; Martínez, M.; Cotera, E. (s.f.) "Incorporación del uso de tecnologías de información para el aprendizaje matemático del área económico administrativo", *Universidad Autónoma del Estado de México* en: <http://www.fca.uach.mx/Documentos/Revista/Volumenes/Volumen8/8Ponencia2048UAE MexValleChalco.pdf>, consultado el 24/04/2011, 04:30.

- Ting, D. (2006) "Teaching the limit concept in calculus with technology" en: http://www.colleges.org/techcenter/Fellowships/grants/fellows06/De_Ting_Wu.pdf, consultado el 13/02/2012.
- Tobón, S. (2008). "La formación basada en competencias en la educación superior", en: <http://www.conalepfresnillo.com/images/stories/conalep/Formaci%C3B3n20basada20en20competencias.20Sergio20TobC3B3.pdf>, consultado el 29/09/2012, 16:00.
- Vergnaud, G. (1990) "La Teoría de los Campos Conceptuales", en: *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10**(2): 133-170.
- Vílchez, E. (2007) "Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en educación superior", *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* **2**(3): 45-67, en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CI_FEM/article/view/16/21, consultado el 13/02/2012, 12:55.
- Vrancken, S.; Gregorini, M.; Engler, A.; Müller, D.; Henzenn, N.; Hecklein, M. (s.f.) "El límite infinito: una situación didáctica", en: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/3620Engler.pdf>, consultado el 28/05/2011, 13:00.